5-12-18

Θεώρημα

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής κ' 1-1. Τότε, η f είναι γνησίως μονότονη

Παράδειγμα

$f: A\to\mathbb{R}$, $A=\{1,2,3\}$, $f(1)=1$, $f(2)=3$, $f(3)=2$

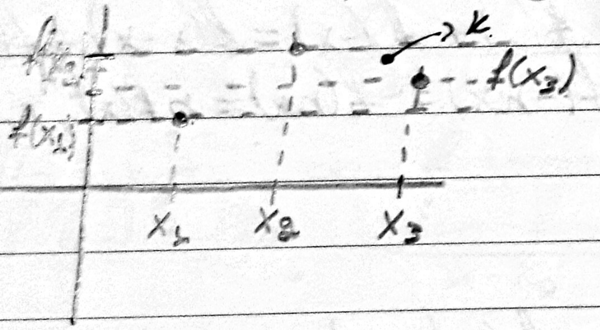
f συνεχής, 1-1, όχι μονότονη.

$f:[a,\theta]\to\mathbb{R}$, 1-1 όχι συνεχής παντού.

Απόδειξη

$\exists\, x_1,x_2,x_3 \in [a,b]$, με $x_1<x_2<x_3$ τ.ω. είτε $f(x_1)>f(x_2)$ κ' $f(x_2)<f(x_3)$ (1), είτε $f(x_1)<f(x_2)$ κ' $f(x_2)>f(x_3)$, αν η f δεν είναι γν. μονότονη (Χωρίς βλάβη της γενικότητας)

Έστω ότι ισχύει (1)



$\exists\, k\in\mathbb{R}$ τω $\max\{f(x_1),f(x_3)\} < k < f(x_2)$. Στο διάστημα $[x_2,x_3]$ η f είναι συνεχής άρα από ΘΕΤ $\exists\, \xi\in(x_2,x_3)$ τω $f(\xi)=k$. Στο διάστημα $[x_1,x_2]$, η f είναι ασυνεχής άρα από ΘΕΤ $\exists\, \xi'\in(x_1,x_2)$ τω $f(\xi')=k$. Άρα βρήκαμε $\xi, \xi'\in[a,b]$, $\xi\neq\xi'$ τω $f(\xi)=f(\xi')$ $\Rightarrow f$ όχι 1-1, ΑΤΟΠΟ

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τω (i) f συνεχής στο $x=0$, (ii) $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. νδο $\exists\, a\in\mathbb{R}$ τω $f(x)=ax$, $\forall x\in\mathbb{R}$

1ο Βήμα → f συνεχής στο $\mathbb{R}$

Απόδειξη → Έστω $\xi \in \mathbb{R}$. Θδο f συνεχής στο ξ

$f(\xi+h) = f(\xi) + f(h) \Rightarrow \lim_{h\to 0} f(\xi+h) = \lim_{h\to 0}(f(\xi)+f(h)) =$

$f(\xi)+f(0)$. Όμως, $f(0) = f(0+0) = f(0)+f(0) =$
$2f(0) \Rightarrow \boxed{f(0)=0}$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(\xi+h) = f(\xi) \Rightarrow f$ συνεχής στο ξ

Στόχος → $f(\lambda x) = \lambda f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Παίρνω $x=1 \Rightarrow f(\lambda \cdot 1) = \lambda \underbrace{f(1)}_{a}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

2ο Βήμα → Έστω $\lambda = n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(\lambda x) = f(nx) =$
$f(\underbrace{x+x+\dots+x}_{n\text{-φορές}}) = \underbrace{f(x)+\dots+f(x)}_{n\text{-φορές}} = n$

3ο Βήμα → Έστω $\lambda = -n, n \in \mathbb{N}$: $f(x)+f(-x) = f(x-x) = f(0) =$
$0 \Rightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(-nx) = -f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{R}$

4ο Βήμα → $\lambda = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$

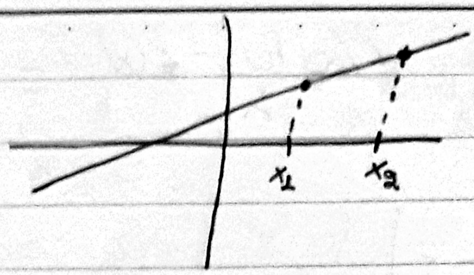
$f(x) = f(n \cdot \frac{1}{n} x) = n f(\frac{x}{n}) \Rightarrow f(\frac{1}{n} \cdot x) = \frac{1}{n} f(x)$

5ο Βήμα → $\lambda = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$

$f(\lambda x) = f(\frac{m}{n} \cdot x) = f(m \cdot \frac{1}{n} \cdot x) = m f(\frac{1}{n} \cdot x) = \frac{m}{n} \cdot f(x) =$
$\lambda f(x)$

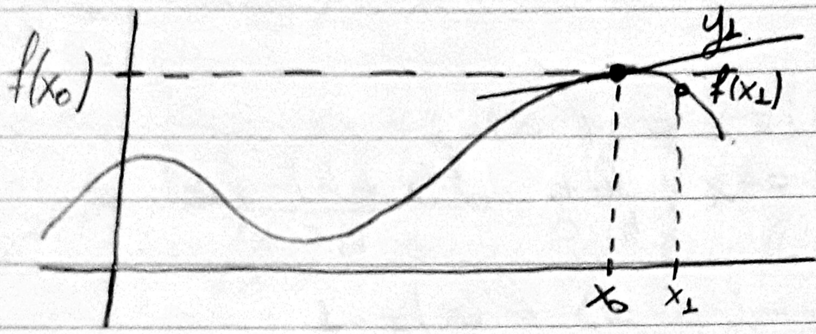
Τέλος απόδειξης → $\lambda \in \mathbb{R}$, $\exists \{\lambda_n\} \subseteq \mathbb{Q}$, τω $\lambda_n \to \lambda$.
$\Rightarrow \lambda_n x \to \lambda x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(\lambda_n x) \to f(\lambda x)$, επειδή η f
συνεχής στο λx, όμως $f(\lambda_n x) = \lambda_n f(x) \to \lambda f(x)$.
$\Rightarrow f(\lambda x) = \lambda f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x)=ax+b$



<u>κλίση της ευθείας</u>

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$



κλίση της εφαπτομένης του γραφήματος της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$

$$\frac{y_1-f(x_0)}{x_1-x_0} \cong \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$\text{κλίση} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Παράγωγος της f στο $x=x_0$ (αν υπάρχει)

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^{\pm}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'_{\pm}(x)$$ (δεξιά ή αριστερή παράγωγος της f στο σημείο x).

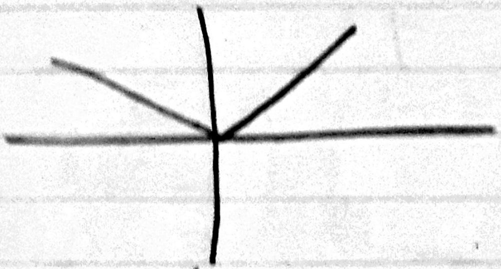
f (παραγωγίσιμη) στο $x\in D(f)\cap D(f')$ αν $f'_+(x), f'_-(x)$ $\exists$ και είναι ίσες

<u>Παραδείγματα</u>

$f(x)=C, \forall x\in\mathbb{R}$, $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = 0, \forall x\in\mathbb{R}$

$f(x)=x$, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x+h-x}{h}=1$

$f(x)=|x|$



Έστω $x>0 \Rightarrow f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$

Έστω $x<0 \Rightarrow f(x)=-x$, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-(x+h)+x}{h}=-1 \Rightarrow f'(x)=-1$

$\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{|h|-0}{h}=$

$\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h}{h}=1$

$\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{|h|-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h}{h}=-1$

$f'_+(0)=1 \neq -1=f'_-(0)$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\\ \nexists, & x=0\end{cases}$$

<u>Άσκηση</u>

Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^{a}\sin(1/x), & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$.

Λύση

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^a \sin\frac{1}{x} - 0}{x-0} = x^{a-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Έστω ότι $a=1 \Rightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ κ'

$\lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \nexists$

Έστω ότι $a<1 \Rightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^{a-1}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) =$

$x^{-p}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, όπου $p>0$. Παίρνω $a_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$

$\Rightarrow a_n^{-p}\cdot\sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = a_n^{-p}\cdot 1 \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Rightarrow f'(0) \nexists$

Αν $a>1$: $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = |x^{a-1}||\sin(\frac{1}{x})| \leq$

$|x^{a-1}| \xrightarrow{x\to 0^+} 0 \overset{\text{ισοσυγκλίνουσες}}{\Rightarrow} f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

$\Rightarrow f'(0) = 0$

Θεώρημα

$f: A\to\mathbb{R}$, f παρ/μη στο $a\in A\cap A'$ ανν $\exists\, \kappa\in\mathbb{R}$, $\exists\, \kappa\in\mathbb{R}$, $\exists\, \lambda_a: A\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$, τω. $\lim_{x\to a}\lambda_a(x) = 0$ κ' $f(x)-f(a) = \kappa(x-a)+\lambda_a(x)(x-a)$, $\forall x\in A\setminus\{a\}$. Τότε, $\kappa = f'(a)$

Απόδειξη

"$\Rightarrow$" Έστω ότι η f είναι παρ/μη στο a

Θέτω $\lambda_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$

$\lim_{x \to \infty} \lambda_a(x) = 0$ (για $\kappa = f'(a)$)

"$\Leftarrow$" Έστω ότι $\exists\, \lambda_a : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, τω. $\lim_{x \to a} \lambda_a(x) = 0$ κ' $\lambda_a(x)(x-a) + \kappa(x-a) = f(x) - f(a)$,

για κάποιο $\kappa \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - \kappa$

$\overset{\lim_{x \to a} \lambda_a(x) = 0}{\Longrightarrow} \kappa = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

<u>Θεώρημα</u>
Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ παρ/μη στο $a \in A \cap A' \Rightarrow f$ συνεχής στο a.

<u>Απόδειξη</u>
$\exists\, \kappa \in \mathbb{R}$, $\lambda_a : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ τω. $\lim_{x \to a} \lambda_a(x) = 0$ κ'

$f(x) - f(a) = \kappa(x-a) + \lambda_a(x)(x-a) \Rightarrow \lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = 0$

* Το αντίστροφο δεν ισχύει π.χ. $f(x) = |x|$

<u>Θεώρημα</u>
Η παράγωγος, αν υπάρχει, σε κάποιο σημείο, είναι μοναδική

<u>Παράδειγμα</u>
Η συμμετρική παράγωγος της f στο $x = a$

$f_s'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$

↳ συμμετρική παράγωγος

$f_+'(a) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{\xi\to 0^+} \frac{f(a-\xi)-f(a)}{-\xi}$$

$$= -\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a-h)-f(a)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \frac{f'_+(a)+f'_-(a)}{2}$$

Άρα, αν $f'(a)$ υπάρχει $\Rightarrow f_s'(a) = f'(a)$

Το αντίστροφο δεν ισχύει, πχ. $f(x)=|x|$

$f_s'(0) = \frac{f'_+(0)+f'_-(0)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$, αλλά $f'(0)\not\exists$

$f(x) = \begin{cases} x^2, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases}$

f δεν είναι συνεχής σε κανένα $\xi\neq 0$

Όμως, έστω $\xi\neq 0$, $a_n\to\xi$, $b_n\to\xi$, $\{a_n\}\subseteq\mathbb{Q}$, $\{b_n\}\subseteq\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow f(a_n)=a_n^2\to\xi^2\neq f(b_n)=0\to 0$

$\Rightarrow f$ δεν είναι παρ/μη σε κανένα $\xi\neq 0$

$$\left|\frac{f(x)-\overset{=0}{f(0)}}{x-0}\right| = \frac{|x^2 \text{ ή } 0|}{|x|} \leq \frac{|x|^2}{|x|} = |x| \xrightarrow{x\to 0} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 = f'(0)$$

Έστω f, g, $a\in D(f)\cap D(g)\cap D(f')\cap D(g')$

Αν $f'(a)$, $g'(a)$ $\exists$ τότε

(i) $(f\pm g)'(a) = f'(a)\pm g'(a)$ (τετριμμένο)

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$ (κανόνας Leibnitz)

(iii) $(f/g)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$, αν $g(a) \neq 0$

Απόδειξη

(ii) $$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = \frac{f(x)(g(x)-g(a))}{x-a} + \frac{g(a)(f(x)-f(a))}{x-a} \xrightarrow{x \to a} f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$$

(iii) $$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{\frac{g(a)-g(x)}{g(x)g(a)}}{x-a} = \frac{-1}{g(x)g(a)} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$\xrightarrow{x \to a} -\frac{1}{g^2(a)} \cdot g'(a) \Rightarrow \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}$$

Θεώρημα

Έστω ότι g παρ/μη στο $f(a)$, f παρ/μη στο a κ' $g \circ f$ ορίζεται σε μια περιοχή του a. Τότε, $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$ (κανόνας αλυσίδας)

Απόδειξη

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x)-f(a)} \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\xrightarrow{x \to a} g'(f(a))f'(a)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x)-f(a)} = \lim_{y \to f(a)} \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} =$$

$g'(f(a))$

Θεώρημα

Έστω ότι f 1-1, παρ/μη στο $x=a$ κ' $f'(a)\neq 0$
$\Rightarrow f^{-1}$ παρ/μη στο $y=f(a)$ κ' $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$